אלגברה 1/מ 104016 בחן אמצע סמסטר סמסטר אביב תשס"ט

15.06.09

מספר סטודנט: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐ פקולטה:

- משך הבוחן: שעתיים.
- בבוחן זה 4 שאלות – בדוק כעת שכולן מופיעות בטופס שלך.
- אין להשתמש בכל חומר עזר.
- אסור להחזיק במחשבונים או טלפונים סלולאריים.
- נא לכתוב בעט שחור או כחול, ולא בעפרון.
- **יש לנמק כל צעד, תשובה לא מנומקת לא תתקבל**.
- אין לפרק את השאלון, ויש להחזירו בשלמותו בתום הבחינה.
- מותר לכתוב משני צידי הדף.
- אין לצרף דפים נוספים לשאלון – המחברות המשובצות מיועדת לטיוטה בלבד, והן לא תיאספנה.
- כל ההוראות בלשון זכר מיועדות כמובן גם לסטודנטיות.

בהצלחה!

לשימוש מנהלי

שאלה 1	
שאלה 2	
שאלה 3	
שאלה 4	
סה"כ	

ציון שאלת ש"ב – 3 א' ו- ב'

שאלה 1: [28 נק']

נתונה מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 3x-3y+(a-1)z=-8 \\ 2x+(a-1)y-3z=-2 \\ 2x-2y+az=-6 \end{cases}$$

א. מצא את כל ערכי a עבורם למערכת:

I. פתרון יחיד.

II. אין אף פתרון.

III. אינסוף פתרונות.

ב. מצא את הפתרון הכללי למערכת במקרה שיש לה אינסוף פתרונות.

שאלה 2: [28 נק']

נתונים שני תת-המרחבים הבאים של $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$U=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\,\middle|\, x+2y-z-w=0\right\}$$

$$W=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

א. מצא בסיס של U .

ב. מצא בסיס של W .

ג. מצא בסיס של $U\cap W$.

ד. מצא תת-מרחב W_1 כך ש- $W\oplus W_1=\mathbb{R}^{2\times 2}$. האם W_1 יחיד? נמק.

שאלה 3: [20 נק']
הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם u,v,w שלושה וקטורים תלויים ליניארית, אזי $\mathrm{Span}\left(\{u,v\}\right)=\mathrm{Span}\left(\{u,w\}\right)$.

ב. אם A מטריצה ממשית מסדר $m\times n$, אזי אם שורות A מהוות בסיס של $\mathbb{R}^n$ אז עמודות A מהוות בסיס של $\mathbb{R}^m$.

ג. אם A,B מטריצות שקולות שורה, אזי יש להן אותו מרחב עמודה.

ד. לכל שתי מטריצות A,B ריבועיות מאותו סדר מתקיים: $r\left(AB\right)=r\left(BA\right)$.

שאלה 4: [24 נק']

א. מצא את כל המספרים המרוכבים המקיימים את המשוואה: $z^3 = \left(\bar{z}\right)^2$.

ב. יהא $v \in \mathbb{R}^2$ כך ש- $\left[v\right]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ כאשר E הוא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ ו $\left[v\right]_E$ מסמן את וקטור הקואורדינאטות של v ביחס לבסיס E . הוכח שלא קיים בסיס B של $\mathbb{R}^2$ כך ש- $\left[v\right]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

ג. תהא $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. נסמן ע"י U את מרחב השורה של A ו-ע"י W את מרחב העמודה של A . הוכח שאם $U = \text{Span}\left\{(1,1,1),(1,2,3)\right\}$ אזי $U \cap W \neq \left\{0\right\}$.